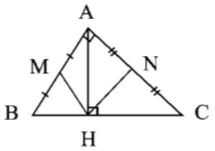
دبیرستان احسان

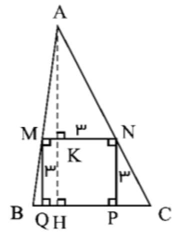
پاسخنامه آزمون ریاضی۳ (تجربی) - **هندسه** (۱۳۰۸□۹۸)

۱ - گزینه ۳



دو مثلث AHB و AHC متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$ است. پس نسبت میانه‌های HN و HM نیز $\frac{۲}{۳}$ است.

۲ - گزینه ۲ نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌های متناظر، برابر نسبت تشابه است.



$$AH=h\Rightarrow AK=AH-KH=h-۳$$

مربع $MNPQ\Rightarrow MN\parallel PQ\Rightarrow MN\parallel BC$

بنابراین دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و نسبت ارتفاع‌های آن‌ها با نسبت تشابه برابر است:

$$\frac{AK}{AH}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{h-۳}{h}=\frac{۳}{۴/۸}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{h-(h-۳)}{h}=\frac{۴/۸-۳}{۴/۸}\Rightarrow\frac{۳}{h}=\frac{۱/۸}{۴/۸}\Rightarrow\frac{۳}{h}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow h=۸$$

۳ - گزینه ۴ راه‌حل اول:

نکته(طرفین وسطین): اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آنگاه: $ad=bc$

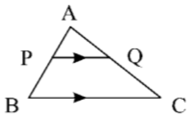
$$\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۸a+ab=۱۰b+ab\Rightarrow ۸a=۱۰b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

راه‌حل دوم:

نکته(تفضیل در مخرج): اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آنگاه: $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

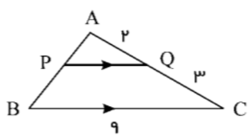
$$\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{a}{۱۰+a-a}=\frac{b}{۸+b-b}\Rightarrow\frac{a}{۱۰}=\frac{b}{۸}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

۴ - گزینه ۱ نکته(تعمیم قضیهٔ تالس): در شکل روبه‌رو، اگر $PQ\parallel BC$ آنگاه:



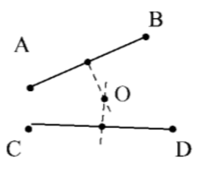
$$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AB}=\frac{PQ}{BC}$$

با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{PQ}{۹}\Rightarrow PQ=\frac{۱۸}{۵}=۳/۶$$

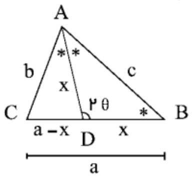
۵ - گزینه ۱ ویژگی عمودمنصف این است که از دو سر پاره‌خط به یک اندازه می‌باشد. پس برای یافتن نقطهٔ مورد نظر باید عمودمنصف هر دو پاره‌خط رسم شود.



O روی عمودمنصف هر دو پاره‌خط $\begin{cases}OA=OB\\OC=OD\end{cases}$

۱۲ - گزینه ۲

اگر نیمساز زاویه A را رسم کنیم تا BC را در D قطع کند، آنگاه مطابق شکل دو مثلث ADB و ABC متشابهند داریم:

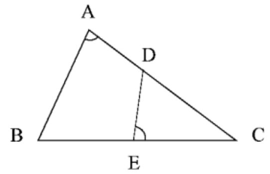


$$\overbrace{\frac{x}{c}}^{\text{مقابل}c}=\overbrace{\frac{a-x}{b}}^{\text{مقابل}*}=\overbrace{\frac{b}{a}}^{\text{قطع سوم}}\Rightarrow x=\frac{bc}{a}$$

راه حل دوم: با توجه به رابطه‌ی نیمساز در مثلث داریم:

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times CD\Rightarrow x^۲=cb-x(a-x)\Rightarrow ax=bc\Rightarrow x=\frac{bc}{a}$$

۱۳ - گزینه ۲ در دو مثلث ABC و CDE داریم:



$$\hat{A}=\hat{E}\ ,\ \ \hat{C}=\hat{C}$$

بنابراین دو مثلث ABC و CDE بنا به حالت دو زاویه متشابه‌اند. حال تناسب اضلاع آن‌ها را می‌نویسیم:

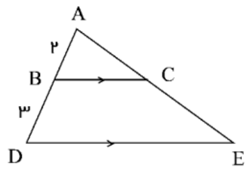
$$\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{BC}=\frac{EC}{AC}$$

۱۴ - گزینه ۴ می‌دانیم نسبت مساحت‌ها، توان دوم نسبت تشابه است، بنابراین:

$$k^۲=\frac{s}{s'}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow k=\frac{۴}{۵}$$

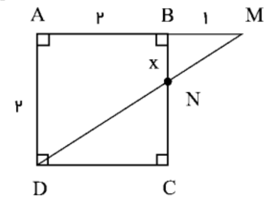
$$k=\frac{h}{h'}\xrightarrow[h=۲]{}\frac{۴}{۵}=\frac{۲}{h'}\Rightarrow h'=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۱۵ - گزینه ۱ ABC و ADE با نسبت ۲ به ۵ متشابه‌اند. پس: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{۴}{۲۵}$ داریم:



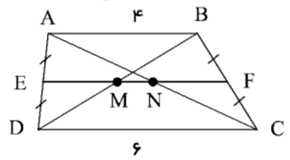
$$S_{ADE}=S_{ABC}+S_{BCED}$$
$$\Rightarrow S_{BCED}=(۱-\tfrac{۴}{۲۵})S_{ADE}=\tfrac{۲۱}{۲۵}S_{ADE}$$

۱۶ - گزینه ۱ طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی تالس در مثلث AMD :



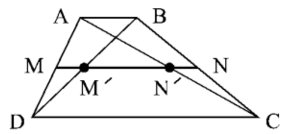
$$\frac{MB}{AM}=\frac{BN}{AD}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{۲}\Rightarrow X=\frac{۲}{۳}$$

۱۷ - گزینه ۱ قضیه‌ی تالس را یک‌بار در مثلث ABC و یک بار در مثلث BDC می‌نویسیم:



$$\begin{cases}A\overset{\Delta}{B}C:\dfrac{NF}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow NF=\dfrac{AB}{۲}=۲\\ B\overset{\Delta}{D}C:\dfrac{MF}{CD}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow MF=\dfrac{DC}{۲}=۳\end{cases}\Rightarrow MN=MF-NF=۳-۲=۱$$

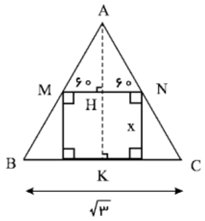
روش دوم: نکته: بطور کلی اگر وسط‌های ۲ ساق ذوزنقه را به هم وصل کنیم، خط میانگین ذوزنقه به دست می‌آید و داریم:



$$\begin{cases}MN=\dfrac{AB+DC}{۲}\\ M'N'=\dfrac{|AB-DC|}{۲}\end{cases}$$

بنابراین : $MN=\dfrac{۶-۴}{۲}=۱$

۱۸ - گزینه ۲ راه‌حل اول: در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌های متناظر، با نسبت تشابه برابر است با:



$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\frac{AH}{AK}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{AK-x}{AK}=\frac{x}{\sqrt{3}}\ ,\ AK=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$$

$$1-\frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{x}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{3}{2+\sqrt{3}}\Rightarrow x=3(2-\sqrt{3})$$

راه حل دوم:

$$\begin{cases} AK=\frac{\sqrt{3}}{2}\times AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}\ (\text{ارتفاع در مثلث متساوی الاضلاع } ABC) \\ AH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times MN=\frac{\sqrt{3}}{2}x\ (\text{ارتفاع در مثلث متساوی الاضلاع } AMN) \end{cases}$$

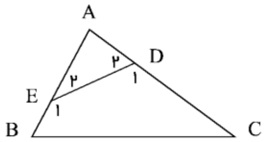
$$\xrightarrow{AK=AH+HK}\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\Rightarrow x=3(2-\sqrt{3})$$

۱۹ - گزینه ۲

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{16}{100}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{4}{10}\xrightarrow{DE\|BC}\frac{AE}{AC}=\frac{4}{10}\xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}}\frac{CE}{AC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}=0/36$$

۲۰ - گزینه ۳ از اینکه زوایای مقابل چهارضلعی مکمل‌اند، نتیجه می‌گیریم دو مثلث متشابه‌اند. ببینید:

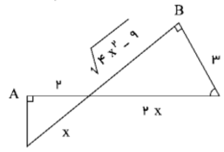


می‌دانیم $\left.\begin{array}{l}\hat{D}_1+\hat{B}=180^\circ\\ \hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{B}=\hat{D}_2$

به صورت مشابه نتیجه می‌شود که $\hat{C}=\hat{E}_2$ پس دو مثلث متشابه‌اند.

$$\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow k=\frac{DE}{BC}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=k^2=\frac{9}{25}\Rightarrow\frac{S_{BCDE}}{S_{ABC}}=\frac{16}{25}\Rightarrow\frac{S_{BCDE}}{S_{ADE}}=\frac{16}{9}$$

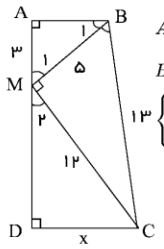
۲۱ - گزینه ۲ دو مثلث قائم‌الزاویه در شکل دارای دو زاویه مساوی هستند پس متشابه‌اند.



$$\frac{2}{\sqrt{4x^2-9}}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$4=\sqrt{4x^2-9}\Rightarrow 4x^2-9=16\Rightarrow x^2=\frac{25}{4}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

۲۲ - گزینه ۳ نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر مجموع مجذورات اضلاع قائمه است.

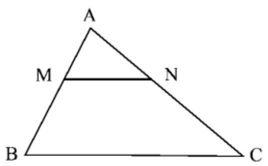


$$\overset{\Delta}{ABM}:\ MB=\sqrt{AM^2+AB^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$\overset{\Delta}{BMC}:\ MC:\sqrt{BC^2-MB^2}=\sqrt{169-25}=12$$

$$\begin{cases}\hat{M}_1+\hat{M}_2=90^\circ\\ \hat{B}_1+\hat{M}_1=90^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{B}_1=\hat{M}_2\Rightarrow\sin\hat{B}_1=\sin\hat{M}_2\Rightarrow\frac{3}{5}=\frac{x}{12}\Rightarrow x=\frac{36}{5}=7/2$$

۲۳ - گزینه ۴



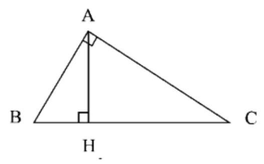
$$S_{MNCB}=4S_{\overset{\Delta}{AMN}}\Rightarrow S_{MNCB}+S_{\overset{\Delta}{AMN}}=5S_{\overset{\Delta}{AMN}}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=5S_{\overset{\Delta}{AMN}}$$

چون دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند (زیرا $MN\parallel BC$). پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است. بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{1}{5}\Rightarrow\left(\frac{MN}{BC}\right)^2=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

۲۴ - گزینه ۳ نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

مثلث‌های ABC، ABH و ACH بنا به حالت دو زاویه متشابه‌اند.



$$\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$$

پس از نکته‌ی فوق داریم:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=(\frac{AB}{AC})^{۲}=(\frac{۲}{۳})^{۲}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow S_{ACH}=\frac{۹}{۴}S_{ABH}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}=\frac{S_{ABH}+S_{ACH}}{S_{ABH}}=\frac{S_{ABH}+\frac{۹}{۴}S_{ACH}}{S_{ABH}}=\frac{۴+۹}{۴}=\frac{۱۳}{۴}=۳/۲۵$$

۲۵ - گزینه ۳ تناسب اضلاع به صورت‌های مختلفی می‌تواند برقرار شود، چون در مثلث اول نسبت دو ضلع $\frac{۳}{۴}$ است، در مثلث دوم هم باید باشد:

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{b}\Rightarrow b=۴$$
$$\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{b}\Rightarrow b=\frac{۲۰}{۳}$$
$$\frac{۴}{۳}=\frac{۳}{b}\Rightarrow b=\frac{۹}{۴}$$
$$\frac{۴}{۳}=\frac{۵}{b}\Rightarrow b=\frac{۱۵}{۴}$$