دبیرستان احسان

پاسخنامه تمرین هندسه - وارون و دترمینان (۱۰۰۸□۹۸)

۱) (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}2&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\4&4\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0\\12&8\end{bmatrix}\to A^n=\begin{bmatrix}2^n&0\\n\times 2^{n-1}&2^n\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{n=100}A^{100}=\begin{bmatrix}2^{100}&0\\100\times 2^{99}&2^{100}\end{bmatrix}$$

$$A^{100}+I=\begin{bmatrix}2^{100}+1&0\\100\times 2^{99}&2^{100}+1\end{bmatrix}\to\left|A^{100}+I\right|=(2^{100}+1)^2$$

۲) **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\frac{|A^2+I|}{|A+I|}=\frac{|A^2+A^3|}{|A+I|}=\frac{|A^2(A+I)|}{|A+I|}=\frac{|A^2||A+I|}{|A+I|}=|A|^2=1$$

روش تستی: کافیست به‌جای $A=I$ قرار دهیم:

$$\frac{|I^2+I|}{|I+I|}=\frac{|2I|}{|2I|}=1$$

۳) (۱) (۲) (۳) **(۴)** **با توجه به اینکه $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$ داریم:** $A=\begin{bmatrix}0&\cos^2\alpha\\\frac{1}{\cos^2\alpha}&0\end{bmatrix}$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&\cos^2\alpha\\\frac{1}{\cos^2\alpha}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\cos^2\alpha\\\frac{1}{\cos^2\alpha}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^2=I\to\begin{cases}A^{100}=I\\A^{101}=A\end{cases}\to A^{100}+A^{101}=I+A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\cos^2\alpha\\1+\tan^2\alpha&0\end{bmatrix}$$

$$I+A=\begin{bmatrix}1&\cos^2\alpha\\1+\tan^2\alpha&1\end{bmatrix}\to|I+A|=1-\underbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}_{1}=0$$

۴) (۱) (۲) **(۳)** (۴)

راه‌حل اول: نکته: $\begin{bmatrix}1&0\\a&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\b&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\a+b&1\end{bmatrix}$

باتوجه به نکتهٔ بالا، حاصل‌ضرب ماتریس‌های داده شده برابر است با:

نکته: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\1+2+3+\cdots+20&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{20\times 21}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\210&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۲۱۲ است.

راه‌حل دوم: نکته: $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0\\n&1\end{bmatrix}$

باتوجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&0\\20&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}^2\cdots\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}^{20}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}^{1+2+\cdots+20}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}^{210}=\begin{bmatrix}1&0\\210&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۲۱۲ است.

۵) (۱) **(۲)** (۳) (۴) **اگر فرض کنیم** $||A|\,A|=x$:

$$|\underbrace{||A|\,A|}_{x}A|=|A|^7$$

$$\to x^n\,|A|=|A|^7\to ||A|\,A|^n\,|A|=|A|^7\to(|A|^n\,|A|)^n\,|A|=|A|^7$$

$$\to(|A|^{n+1})^n\,|A|=|A|^7\to|A|^{n(n+1)}\,|A|=|A|^7$$

$$\to|A|^{n^2+n+1}=|A|^7\to n^2+n+1=7\to n^2+n-6=0$$

$$\to(n-2)(n+3)=0\Rightarrow\begin{cases}n=2 & \text{ق ق}\\n=-3 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۶) (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$(3A+4I)(3A-4I)=9A^2-16I\xrightarrow{A^2=5I}(3A+4I)(3A-4I)=29I$$

$$\to(3A+4I)\frac{(3A-4I)}{29}=I\to(3A+4I)^{-1}=\frac{1}{29}(3A-4I)$$

۷) ۱ **❷** ۳ ۴

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{B} A \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}}_{D} \rightarrow BAC = D$$

طرفین را از سمت چپ در $B^{-۱}$ و از سمت راست در $C^{-۱}$ ضرب می‌کنیم. بنابراین:

$$\underbrace{B^{-۱}B}_{I}A\underbrace{CC^{-۱}}_{I} = B^{-۱}DC^{-۱} \rightarrow A = B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$B^{-۱} = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \ , \ C^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-۱}DC^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \frac{۲}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۸) **❶** ۲ ۳ ۴

$$A^{-۱}(B^{-۱}+A^{-۱})^{-۱}B^{-۱} = (B(B^{-۱}+A^{-۱})A)^{-۱}$$

$$= ((I+BA^{-۱})A)^{-۱} = (A+B)^{-۱} = (\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix})^{-۱}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱} = (۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۲}I$$

۹) ۱ ۲ **❸** ۴ عبارت مقابل را از سمت راست در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A + B = I \rightarrow (A + B)A^{-۱} = IA^{-۱}$$

$$\rightarrow I + BA^{-۱} = A^{-۱} \rightarrow BA^{-۱} = A^{-۱} - I$$

$$\rightarrow BA^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |BA^{-۱}| = -۶ \rightarrow |B|\underbrace{|A^{-۱}|}_{-۲} = -۶ \rightarrow |B| = ۳$$

۱۰) ۱ ۲ ۳ **❹**

$$A^{۲} - ۳A - I = \bar{۰} \rightarrow A^{۲} - I = ۳A$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } \frac{۱}{۳}A^{-۱}} \frac{۱}{۳}A^{-۱}(A^{۲} - I) = \underbrace{\frac{۱}{۳}A^{-۱} \times ۳A}_{I}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۳}A^{-۱}(A - I)(A + I) = I \rightarrow (I - A)^{-۱} = -\frac{۱}{۳}A^{-۱}(A + I)$$

$$\rightarrow (I - A)^{-۱} = -\frac{۱}{۳}(I + A^{-۱})$$

۱۱) **❶** ۲ ۳ ۴

$$A = B + C \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } B^{-۱}} B^{-۱}A = B^{-۱}(B + C) = I + B^{-۱}C$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } C^{-۱}} B^{-۱}AC^{-۱} = (I + B^{-۱}C)C^{-۱} \rightarrow B^{-۱}AC^{-۱} = \underbrace{C^{-۱} + B^{-۱}}_{x}$$

۱۲) ۱ ۲ **❸** ۴

$$A^{۳} - A^{۲} + A = -I \rightarrow A(A^{۲} - A + I) = -I$$

$$\rightarrow A(-A^{۲} + A - I) = I \rightarrow A^{-۱} = -A^{۲} + A - I$$

۱۳) ۱ ۲ **۳** ۴

$$AB^{-1} = ۳I \rightarrow (AB^{-1})^{-1} = (۳I)^{-1} \rightarrow BA^{-1} = \frac{۱}{۳}I$$

$$B(CA)^{-1} = \underbrace{BA^{-1}}_{\frac{۱}{۳}I}C^{-1} = \frac{۱}{۳}C^{-1} \quad و \quad C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۹ \end{bmatrix} \rightarrow C^{-1} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۹ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow B(CA)^{-1} = \frac{۱}{۳}C^{-1} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۹ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۲}{۹} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۹} \end{bmatrix}$$

۱۴) **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم همواره:

$$(A-I)(A-I)^{-۱} = I \rightarrow A(A-I)^{-۱} - I(A-I)^{-۱} = I$$

$$\rightarrow A(A-I)^{-۱} = I + (A-I)^{-۱}$$

$$\rightarrow A(A-I)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

۱۵) ۱ **۲** ۳ ۴

تذکر: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، B را وارون A نامند هرگاه: $AB = BA = I$

$$(I-۳A)(I+\lambda A) = I \Rightarrow I^۲ + (\lambda-۳)A - ۳\lambda A^۲ = I \xrightarrow{A^۲=A} I + (\lambda-۳)A - ۳\lambda A = I$$

$$\Rightarrow (\lambda-۳-۳\lambda)A = \bar{O} \Rightarrow (-۲\lambda-۳)A = \bar{O} \xrightarrow{A\neq\bar{O}} -۲\lambda-۳ = ۰ \Rightarrow \lambda = -\frac{۳}{۲}$$

۱۶) ۱ ۲ ۳ **۴** **نکته:** اگر A ماتریس مربعی مرتبه $n\times n$ بوده و k عددی حقیقی باشد: $|kA| = k^n|A|$

$$A^۲ = A + I \quad , \quad |A| = -۱$$

$$(A+۲I)^۲ = A^۲ + ۴A + ۴I = A^۲ + ۴\underbrace{(A+I)}_{A^۲} = ۵A^۲$$

$$|A+I|^۲ = |۵A^۲| = ۵^۳|A^۲| = ۵^۳|A|^۲ = ۱۲۵\times(-۱)^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow |A+۲I| = \pm\sqrt{۱۲۵} = \pm۵\sqrt{۵}$$

۱۷) ۱ ۲ **۳** ۴

$$(A-۲I)^۲ = A^۲ - ۴A + ۴I^۲$$

طبق فرض $A^۲ = -۴I$ است پس:

$$(A-۲I)^۲ = -۴I - ۴A + ۴I = -۴A$$
$$\left|(A-۲I)^۲\right| = |-۴A| \Rightarrow |A-۲I|^۲ = (-۴)^۴|A| = ۴^۴|A|$$

حال باید دترمینان ماتریس A را بیابیم.

$$A^۲ = -۴I \Rightarrow |A|^۲ = (-۴)^۴|I| \Rightarrow |A|^۲ = ۴^۴ \Rightarrow |A| = \pm۴^۲$$
$$|A-۲I|^۲ = ۴^۴(\pm۴^۲) \Rightarrow |A-۲I|^۲ = ۴^۴\times۴^۲ = ۴^۶ \Rightarrow |A-۲I| = \pm۴^۳ = \pm۲^۶$$

۱۸) **۱** ۲ ۳ ۴

$$(۳I+A)^۲ = ۹I^۲ + ۶A + A^۲ = ۹I + ۶A + A^۲ \quad = ۳\underbrace{(۳I+۲A)}_{A^۲} + A^۲ = ۳A^۲ + A^۲ = ۴A^۲$$

$$\Rightarrow (۳I+A)^۲ = ۴A^۲ \xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان}} |۳I+A|^۲ = |۴A^۲| \quad \Rightarrow |۳I+A|^۲ = ۴^۳|A|^۲ = ۶۴\times۴ = ۲۵۶$$

$$\Rightarrow |۳I+A| = \sqrt{۲۵۶} = ۱۶$$