۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\int \frac{۳x+۴}{\sqrt{x}}dx = \int\left(۳\sqrt{x}+\frac{۴}{\sqrt{x}}\right)dx = ۳\times\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+۸\sqrt{x}+c = (۲x+۸)\sqrt{x}+c$$

$f(x)$ بدست آمده یکتا نمی‌باشد اما با توجه به گزینه‌ها، $f(x)=۲x+۸$ قابل قبول است.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\int_{-۲}^{۲} f(x)dx = \frac{۱}{۲}+۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} y = x^۳ \\ y = ۲-x \end{cases} \Rightarrow x^۳ = ۲-x \Rightarrow x = ۱$$

$$S = \int_{۰}^{۱} x^۳dx + \int_{۱}^{۲}(۲-x)dx$$

$$= \left(\frac{۱}{۴}x^۴\right)\Big|_{۰}^{۱} + \left(۲x-\frac{۱}{۲}x^۲\right)\Big|_{۱}^{۲}$$

۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱} = \frac{\left(\sqrt{x}+۱\right)\left(\sqrt{x}-۱\right)}{\left(\sqrt{x}-۱\right)} = \sqrt{x}+۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}dx = \int_{۰}^{۱}\left(\sqrt{x}+۱\right)dx$$

نکته: انتگرال‌های زیر را به خاطر بسپارید.

$$\int\sqrt{x}\,dx = \frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = ۲\sqrt{x}+C$$

۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{۱}{\cos^۲ ۲x}dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\left(۱+tg^۲ ۲x\right)dx = \frac{۱}{۲}tg\,۲x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}$$

$$= \frac{۱}{۲}tg\frac{\pi}{۳} - ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر f نسبت به مبدأ متقارن باشد: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = ۰$

مثلاً: $\int_{-a}^{a} x^{۲k+۱}\,dx = \int_{-a}^{a} \mathrm{Sin}\, x dx = ۰$ همچنین اگر f نسبت به مبدأ متقارن باشد داریم:

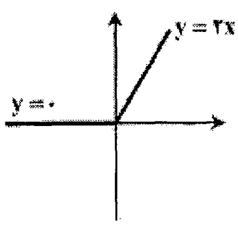
$$\int_{-a}^{a} [f(x)]\,dx = -a$$

پس در این سؤال: $\int_{-۲}^{۲} [x]\,dx = -۲$, $\int_{-۲}^{۲} x^{۳}\,dx = ۰$ و حاصل (۲ -) - ۰ یعنی ۲ است.

۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار $x + |x|$ را می‌توان رسم کرد:

پس در واقع $\int_{۰}^{۲} ۲x\,dx$ را می‌خواهیم:

$$\int_{۲}^{۰} ۲x\,dx = x^{۲}\Big|_{۰}^{۲} = ۴ - ۰ = ۴$$



راه حل دیگر: تابه $y = x$ فرد است، لذا $\int_{-۲}^{۲} x dx = ۰$. همچنین تابع $y = |x|$ زوج است ($(f(-x) = f(x))$، لذا:

$$\int_{-۲}^{۲} |x| dx = ۲\int_{۰}^{۲} |x|\,dx = ۲ \times \frac{۱}{۲}x^{۲}\Big|_{۰}^{۲} = ۴$$

۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\int \frac{۲x^{۲}-۱}{x^{\frac{۳}{۲}}}\,dx = \int \frac{۲x^{۲}}{x^{\frac{۳}{۲}}} - \frac{۱}{x^{\frac{۳}{۲}}}\,dx = \int \left(۲x^{\frac{۱}{۲}} - x^{-\frac{۳}{۲}}\right)dx$$

حاصل هر قسمت از رابطه‌ی $\left(\int x^{r}\,dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱}\right)$ به دست می‌آید:

$$\frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} - \frac{x^{\frac{-۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}} + C = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + ۲\,x^{-\frac{۱}{۲}} + C = \sqrt{x}\,\underbrace{\left(\frac{۴}{۳}x + \frac{۲}{x}\right)}_{f(x)} + C$$

۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مشتق انتگرال به‌صورت $F(x)=\int_{۱}^{x} f(t)\,dt$ ، همان تابع داخل انتگرال است یعنی $F'(x)=f(x)$، پس:

۱۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر به‌جای $\mathrm{Sin}^{۲}x$, $۱-\mathrm{Cos}^{۲}x$ قرار بدهیم، داریم:

$$\frac{\mathrm{Sin}^{۲}x}{۱+\mathrm{Cos}\,x}=\frac{۱-\mathrm{Cos}^{۲}x}{۱+\mathrm{Cos}\,x}=۱-\mathrm{Cos}\,x$$

پس باید از $۱-\mathrm{Cos}\,x$ انتگرال بگیریم:

$$\int(۱-\mathrm{Cos}\,x)\,dx=x-\mathrm{Sin}\,x+C$$

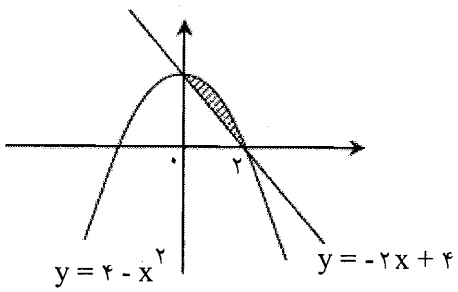
۱۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. تلاقی دو نمودار در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ می‌باشند:

$$x^{۲}+x=۲\sqrt{x}\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۱$$

پس سطح محصور در فاصله‌ی (۱، ۰) قرار دارد و در این فاصله، $۲\sqrt{۲}$ بالاتر است:

$$S=\int_{۰}^{۱}\left(۲\sqrt{x}-(x^{۲}+x)\right)dx=\int_{۰}^{۱}\left(۲x^{\frac{۱}{۲}}-x^{۲}-x\right)dx=\left(۲\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۲}}{۲}\right)\Big|_{۰}^{۱}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases}y=-۲x+۴\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow -۲x+۴=۰\Rightarrow x=۲$$

ناحیه‌ی هاشورخورده $S=\int_{۰}^{۲}(۴-x^{۲})\,dx-\int_{۰}^{۲}(-۲x+۴)\,dx$

$$=\int_{۰}^{۲}(۴-x^{۲}+۲x-۴)\,dx=\int_{۰}^{۲}(-x^{۲}+۲x)\,dx$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$\mathrm{Sin}^{۲}x + \mathrm{Cos}^{۲}x$ که می‌شود ۱ ، مقدار $[-x]+[x]+۳$ هم به جز نقاط صحیح، در سایر نقاط $(-۱)+۳$ است. پس در واقع $\int_{-۱}^{۴} dx$ را داریم:

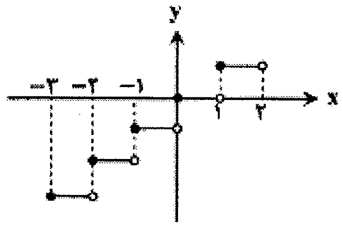
$$\int_{-۱}^{۴} dx = \frac{۱}{۲}(۴-(-۱)) = \frac{۵}{۲}$$

یادآوری: حاصل $\int_{a}^{b} c\,dx$ برابر است با $c(b-a)$.

توجه: در نقاط سحیح، حاصل $[-x]+[x]$ صفر است. اما این نقاط روی مساحت و حاصل انتگرال معین اثری ندارند.

۱۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. بر اساس تعریف تابع اولیه داریم:

$$f(x) = \int \left(x^{۳} - ۴x\right)dx \Rightarrow f'(x) = x^{۳} - ۴x \Rightarrow f''(x) = ۳x^{۲} - ۴ \Rightarrow f''(۲) = ۸$$



۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اول نمودار $y=[x]$ را رسم کنیم: مساحت مورد نظر در فاصله‌ی ۳- تا ۲، از ۴ قسمت ساخته شده‌است. سه تا در زیر محور xها (که منفی اند) و یکی در بالای محور xها (که مثبت است.) پس داریم:

$$۲\int_{-۳}^{۲} [x]\,dx = ۲(-۳-۲-۱+۱) = ۲(-۵) = -۱۰$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای تابع مساحت $y = A(x)$ بر طبق قضیه ی اساسی اول داریم:

$$A(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow A'(x) = f(x)$$

در این تست داریم:

$$y = A\left(x^{۳}\right) \Rightarrow y' = ۳x^{۲}.\ A'\left(x^{۳}\right) = ۳x^{۲} \times \frac{\mathrm{Cos}\left(۲x^{۳}\right)}{x^{۳}} = \frac{۳\mathrm{Cos}\left(۲x^{۳}\right)}{x}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

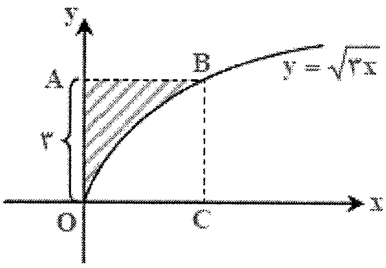
نکته : $\mathrm{Sin}\,۲\alpha = ۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\alpha$

ابتدا با استفاده از نکته‌ی بالا، عبارت داخل انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,۴x}{\mathrm{Cos}^{۲}x - \mathrm{Sin}^{۲}x} = \frac{۲\,\mathrm{Sin}\,۲x\ \mathrm{Cos}\,۲x}{\mathrm{Cos}\,۲x} = ۲\,\mathrm{Sin}\,۲x$$

حال داریم:

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\,۴x}{\mathrm{Cos}^{۲}x - \mathrm{Sin}^{۲}x}dx = \int ۲\,\mathrm{Sin}\,۲x\,dx = -\mathrm{Cos}\,۲x + C$$



۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: $\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + C \quad (n \neq -۱)$

ابتدا با قرار دادن $y = ۳$ در تابع $y = \sqrt{۳x}$ نتیجه می‌گیریم $x = ۳$. اکنون مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$\text{OABC مساحت مستطیل} - \int_{۰}^{۳} \sqrt{۳x}\,dx = ۳ \times ۳ - \int_{۰}^{۳} (۳x)^{\frac{۱}{۲}} dx$$

$$= ۹ - \sqrt{۳}\int_{۰}^{۳} x^{\frac{۱}{۲}} dx = ۹ - \left(\sqrt{۳} \times \frac{۲}{۳} x^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۳}\right) = ۹ - (۶ - ۰) = ۳$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(۲) = ۵ \Rightarrow y'(۱) = ۴ \times ۵ = ۲۰$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۲۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\int_{۰}^{۳} ([۲x] + x)\,dx = \int_{۰}^{۳} [۲x]\,dx + \int_{۰}^{۳} x\,dx = \frac{۱۵}{۲} + \frac{۱}{۲}x^{۲}\Big]_{۰}^{۳} = \frac{۱۵}{۲} + \frac{۹}{۲} = ۱۲$$

زیرا:

$$\int_{۰}^{۳} [۲x]\,dx = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} [۲x]\,dx + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} [۲x]\,dx + \int_{۱}^{\frac{۳}{۲}} [۲x]\,dx + \int_{\frac{۳}{۲}}^{۲} [۲x]\,dx + \int_{۲}^{\frac{۵}{۲}} [۲x]\,dx + \int_{\frac{۵}{۲}}^{۳} [۲x]\,dx$$

$$= ۰ + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} dx + \int_{۱}^{\frac{۳}{۲}} ۲\,dx + \int_{\frac{۳}{۲}}^{۲} ۳\,dx + \int_{۲}^{\frac{۵}{۲}} ۴\,dx + \int_{۳}^{\frac{۵}{۲}} ۵\,dx =$$

$$= x\Big]_{\frac{۱}{۲}}^{۱} + (۲x)\Big]_{۱}^{\frac{۳}{۲}} + (۳x)\Big]_{\frac{۳}{۲}}^{۲} + (۴x)\Big]_{۲}^{\frac{۵}{۲}} + (۵x)\Big]_{\frac{۵}{۲}}^{۳} = \frac{۱}{۲}(۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵) = \frac{۱۵}{۲}$$

نکته: اگر $k \in N$ و $k < n$ آن‌گاه: $\int_{۰}^{n} [kx]\,dx = \frac{n(kn - ۱)}{۲}$

در این تست:

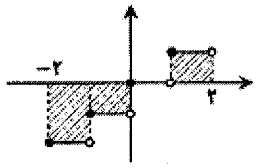
$$I = \int_{۰}^{۳} [۲x]\,dx \Rightarrow \begin{matrix} n = ۳ \\ k = ۲ \end{matrix} \Rightarrow I = \frac{۳(۶ - ۱)}{۲} = \frac{۱۵}{۲}$$

۲۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. حاصل $\int_{-۲}^{۲} ۷x\,dx$ صفر است. چون خط $y=۷x$ از مبدا می‌گذرد و در فاصله‌ی ۲- تا۲ ، نسبت به محور xها مساحت مساوی در بالا و پایین دارد. پس دو مساحت با هم حذف می‌شوند. البته به جای x هر تابع متقارن نسبت به مبدأ مثلا $\mathrm{Sin}\,x, x^{۳}, \sqrt[۳]{x}$ و ... هم می‌تواند قرار بگیرد. در مورد $\int_{-۲}^{۲}[x]\,dx$ هم می‌توان این ویژگی را به خاطر سپرد:

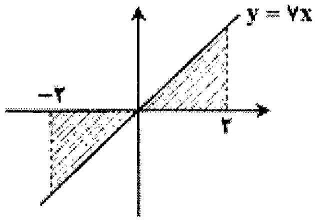
$$\int_{-a}^{a}[x]\,dx=-a$$

شکل را هم ببینید:

$\int_{-۲}^{۲}[x]\,dx=-۲:$



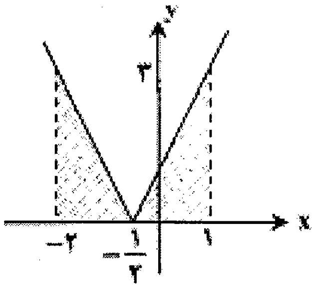
$\int_{-۲}^{۲}۷x\,dx=۰:$



۲۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نمودار $y_{۱}=|۲x+۱|$ را رسم می‌کنیم:

پس برای محاسبه‌ی انتگرال داده شده مساحت دو مثلث را حساب می‌کند.

قاعده‌ی مثلث‌ها $\frac{۳}{۲}$ و ارتفاعشان ۳ است:



$$=\frac{\frac{۳}{۲}\times ۳}{۲}\times ۲=\frac{۹}{۲}$$

۲۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نمودار $[x]+[-x]$ را می‌شناسیم. در اعداد غیرصحیح حاصل آن ۱ - است، پس داریم:

$$\int_{۳}^{-۱}(-۱)\,dx=-۱\,(۳-(-۱))=-۱\times ۴=-۴$$

نکته‌ی ۱: حاصل $\int_{a}^{b}C\,dx$ به‌صورت $C\,(b-a)$ است. نکته‌ی ۲: اعداد صحیح ، چند نقطه هستند و اثری روی حاصل انتگرال ندارند.

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Cos}\,x)^{۲}=\mathrm{Sin}^{۲}x+\mathrm{Cos}^{۲}x+۲\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x=۱+\mathrm{Sin}\,۲x$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}(۱+\mathrm{Sin}\,۲x)\,dx=x-\frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\,۲x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=\left(\frac{\pi}{۴}-۰\right)-\left(۰-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{\pi+۲}{۴}$$