دبیرستان احسان

پاسخنامه آزمون ریاضیات گسسته ـ مطابق آزمون آزمایشی شماره ۷ - گزینه‌دو (95T01115)

۱- پاسخ: گزینه‌ی ۳ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه ۶۰ ریاضیات گسسته

راه‌حل اول:

نکته: در ماتریس مجاورتِ نظیرِ یک گراف جهت‌دار اگر از رأس iام به رأس jام یال وجود داشته باشد، درایه‌ی سطر iام و ستون jام در ماتریس برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر است.

ماتریس مجاورت گراف داده شده را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین تعداد صفرهای ماتریس مجاورت برابر ۱۰ است.

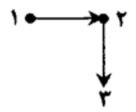
راه‌حل دوم:

هریک از یال‌های جهت‌دار، نظیر یک درایه‌ی ۱ در ماتریس هستند. حال با توجه به این‌که ماتریس مجاورت این رابطه $۴^۲$ درایه دارد، نتیجه می‌گیریم:

$۱۰ = ۶ - ۱۶ =$ تعداد یک‌ها $-$ تعداد کل درایه‌ها $=$ تعداد صفرها

۲- پاسخ: گزینه‌ی ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه ۵۹ ریاضیات گسسته

برای تخریب خاصیت تعدی، R باید حداقل ۲ عضو داشته باشد.



$$R = \{(۱,۲),(۲,۳)\}$$

این رابطه بازتابی، تقارنی و تعدی نیست و فقط پادتقارنی است.

۳- پاسخ: گزینه‌ی ۱ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه ۵۰ ریاضیات گسسته

راه‌حل اول:

نکته (قضیه‌ی فرما): اگر p عددی اول و a عددی دلخواه باشد، به‌طوری‌که $(a,p) = ۱$، آن‌گاه:

$$a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$$

با توجه به نکته‌ی فوق داریم:

$$۷^{۱۳-۱} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

حال باید کاری کنیم که توان ۷ یک واحد کاهش یابد. برای این منظور، سمت راست همنهشتی، مضرب ۷ می‌سازیم:

$$۷^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱+۱۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۴ = ۲\times۷ \xrightarrow[(۷,۱۳)=۱]{\div۷} ۷^{۱۱} \overset{۱۳}{\equiv} ۲$$

راه‌حل دوم:

$$۷^۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \Rightarrow (۷^۲)^۳ \overset{۱۳}{\equiv} (-۳)^۳ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷^۶ \overset{۱۳}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow ۷^{۱۱} = ۷^۶\times۷^۲\times۷^۲\times۷ \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)(-۳)(-۳)(۷) \overset{۱۳}{\equiv} -۹\times۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۲$$

۴- پاسخ: گزینه‌ی ۱ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۵۰ ریاضیات گسسته

نکته: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن‌گاه $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

نکته: اگر $a_۱ \overset{m}{\equiv} b_۱$، $a_۲ \overset{m}{\equiv} b_۲$، ... و $a_r \overset{m}{\equiv} b_r$، آن‌گاه:

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_r \overset{m}{\equiv} b_۱ + b_۲ + \cdots + b_r$$

نکته: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح r داریم: $ra \overset{m}{\equiv} rb$

$$۴! \overset{۱۲}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۲}{\equiv} ۰$$

بنابراین به ازای هر $m \geq ۴$ داریم: $m! \overset{۱۲}{\equiv} ۰$

$$S \overset{۱۲}{\equiv} ۱!+۲!+\cdots+۱۰۰! \Rightarrow S \overset{۱۲}{\equiv} ۱!+۲!+۳!+۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۹ \Rightarrow S^۳ \overset{۱۲}{\equiv} ۹\times۹\times۹ \overset{۱۲}{\equiv} (-۳)\times(-۳)\times(-۳) \overset{۱۲}{\equiv} -۲۷ \overset{۱۲}{\equiv} -۳ \overset{۱۲}{\equiv} ۹$$

۵ - پاسخ: گزینه‌ی ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۶۳ ریاضیات گسسته

نکته: فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی n عضوی A و M ماتریس نمایش آن باشد. در این‌صورت داریم:

R بازتابی است، اگر و تنها اگر $I_n << M$

R متقارن است، اگر و تنها اگر $M = M^T$

R ترایایی است، اگر و تنها اگر $M^{(۲)} << M$

R پادمتقارن است، اگر و تنها اگر $M \wedge M^T << I$

با توجه به نکته‌ی فوق، منظور سؤال تعداد روابط متقارن و پادمتقارن روی یک مجموعه‌ی ۵ عضوی است.

R فقط می‌تواند عناصر قطر اصلی را اختیار کند. بنابراین:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & a & b & c & d & e \\ \hline a & \circ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \circ & \cdot & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot & \circ & \cdot & \cdot \\ d & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & \cdot \\ e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \circ \end{array}$$

تعداد روابط $= ۲^۵$

۶ - پاسخ: گزینه‌ی ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۶۰ ریاضیات گسسته

نکته: رابطه‌ی R که روی مجموعه‌ی A تعریف شده است را در نظر می‌گیریم:

R بازتابی است، هر گاه به ازای هر $a \in A$، داشته باشیم: $(a,a) \in R$

R متقارن است، هر گاه اگر $(a,b) \in R$، داشته باشیم: $(b,a) \in R$

R پادمتقارن است، هر گاه اگر $(a,b),(b,a) \in R$، داشته باشیم: $a = b$

R ترایایی (تراگذری، متعدی) است، هر گاه اگر $(a,b),(b,c) \in R$، داشته باشیم: $(a,c) \in R$

گزینه‌ی ۱ و ۲: $(a,b),(b,c) \in R$ ولی $(a,c) \notin R$ بنابراین ترایایی نیست.

گزینه‌ی ۳: ترایایی و پادمتقارن است.

گزینه‌ی ۴: فقط ترایایی است.

۷ - پاسخ: گزینه‌ی ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۶۳ ریاضیات گسسته

ماتریس نمایش رابطه‌ی R یک ماتریس ۴×۴ است. تعداد حالت‌های ممکن برای هر یک از درایه‌های این ماتریس را بررسی می‌کنیم:

عناصر روی قطر اصلی هر یک ۲ حالت دارند (عضو رابطه باشند یا نباشند)، پس در کل $۲^۴$ حالت دارند.

برای عناصر غیر واقع بر قطر اصلی، یعنی عناصر به فرم (a,b) که در آن $a \neq b$، داریم:

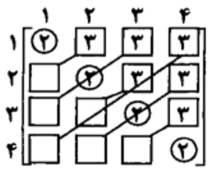
$(a,b) \in R \quad , \quad (b,a) \notin R$

$(a,b) \notin R \quad , \quad (b,a) \in R$

$(a,b) \notin R \quad , \quad (b,a) \notin R$

بنابراین عناصر غیرواقع بر قطر اصلی، در کل $۳^{\frac{۱۶-۴}{۲}} = ۳^۶$ حالت دارند.

در نتیجه تعداد روابط پادمتقارن روی مجموعه‌ی A برابر است با: $۲^۴ \times ۳^۶$



۸- پاسخ: گزینه‌ی ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۵۵ ریاضیات گسسته

ابتدا باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳^۹$ بر ۱۱ را می‌یابیم:

$$۳^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \Rightarrow (۳^۲)^۴ \overset{۱۱}{\equiv} (-۲)^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۳ \times (۳^۲)^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۳^۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۴$$

طبق فرض $a + ۳^۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ پس:

$$a \overset{۱۱}{\equiv} -۳^۹ \overset{۱۱}{\equiv} -۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow a = ۱۱k + ۷ \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

باید تعداد kهایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $۱ \leq a < ۵۰$ باشد:

$$۱ \leq ۱۱k + ۷ < ۵۰ \Rightarrow -۶ \leq ۱۱k < ۴۳ \Rightarrow -\frac{۶}{۱۱} \leq k < \frac{۴۳}{۱۱} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = ۰,۱,۲,۳$$

۹ - **پاسخ: گزینه‌ی ۴** ▲ **مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه ۵۲ ریاضیات گسسته**

نکته: معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ جواب دارد، اگر و تنها اگر $(a,b)\mid c$

با توجه به نکته‌ی فوق، داریم:

$$(۶۳,۲۸)\mid ۲m+۱ \Rightarrow ۷\mid ۲m+۱ \Rightarrow ۲m+۱ \overset{۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲m \overset{۷}{\equiv} -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(۲,۷)=۱]{\div ۲} m \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow m=۷k+۳$$

$$\xrightarrow{۱\le m\le ۳۰} ۱\le ۷k+۳\le ۳۰ \Rightarrow -۲\le ۷k\le ۲۷ \Rightarrow -\frac{۲}{۷}\le k\le \frac{۲۷}{۷} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۰,۱,۲,۳$$

$$\xrightarrow{m=۷k+۳} m=۳,۱۰,۱۷,۲۴$$

راه‌حل دیگر:

$$(۶۳,۲۸)\mid ۲m+۱ \Rightarrow ۷\mid ۲m+۱ \Rightarrow ۲m+۱=۷k \xrightarrow{\text{۲m+۱ فرد است}} \text{k فرد است}$$

طبق فرض $۱\le m\le ۳۰$، پس $۳\le ۲m+۱\le ۶۱$

با جایگذاری $۲m+۱=۷k$ داریم:

$$۳\le ۷k\le ۶۱ \Rightarrow \frac{۳}{۷}\le k\le \frac{۶۱}{۷} \xrightarrow[\text{k فرد}]{k\in\mathbb{Z}} k=۱,۳,۵,۷ \xrightarrow{m=\frac{۷k-۱}{۲}} m=۳,۱۰,۱۷,۲۴$$

۱۰ - **پاسخ: گزینه‌ی ۴** ▲ **مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۴۹ و ۵۰ ریاضیات گسسته**

$a-۲$، $a-۱$، a و $a+۱$ چهار عدد متوالی‌اند. بنابراین باقی‌مانده‌ی آن‌ها در تقسیم بر ۴، چهار عدد صفر، ۱، ۲ و ۳ است. بنابراین:

$$(a-۲)^۵+(a-۱)^۵+a^۵+(a+۱)^۵ \overset{۴}{\equiv} ۰^۵+۱^۵+۲^۵+۳^۵ \overset{۴}{\equiv} ۰+۱+\overset{۰}{\cancel{۳۲}}+۳^۵ \overset{۴}{\equiv} ۱+(۸۱\times ۳) \overset{۴}{\equiv} ۱+(۱\times ۳) \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰$$

۱۱ - **پاسخ: گزینه‌ی ۴** ▲ **مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۵۲ ریاضیات گسسته**

ابتدا x و y را به دست می‌آوریم:

$$۷x+۴y=۷۵ \Rightarrow \underset{۳x}{\cancel{۷x}}+\underset{۰}{\cancel{۴y}} \overset{۴}{\equiv} \underset{۳}{\cancel{۷۵}} \Rightarrow ۳x \overset{۴}{\equiv} ۳ \xrightarrow[(۳,۴)=۱]{\div ۳} x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow x=۴k+۱$$

حال با جایگذاری $x=۴k+۱$ در معادله، y را به دست می‌آوریم:

$$۷(۴k+۱)+۴y=۷۵ \Rightarrow ۴y=-۲۸k+۶۸ \Rightarrow y=-۷k+۱۷$$

$$\Rightarrow x+y=(۴k+۱)+(-۷k+۱۷)=-۳k+۱۸=-۳(k-۶) \Rightarrow x+y \overset{۳}{\equiv} ۰$$

۱۲ - **پاسخ: گزینه‌ی ۲** ▲ **مشخصات سؤال: * ساده * صفحه ۶۱ ریاضیات گسسته**

نکته: اگر $(a,b),(b,c)\in R$، آن‌گاه $(a,c)\in ROR$

$$\left\{\begin{array}{l} ۱\xrightarrow{R}۱\xrightarrow{R}۱,\ ۲\\ ۱\longrightarrow ۲\longrightarrow ۱\\ ۲\longrightarrow ۱\longrightarrow ۱,\ ۲\\ ۳\longrightarrow ۴\quad \times \end{array}\right. \Rightarrow ROR=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$$

بنابراین:

$$(ROR)\cap R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)\}$$

راه‌حل دیگر:

نکته: $M(ROR)=[M(R)]^{(۲)}$

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴)\} \Rightarrow M(R)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M(ROR)=[M(R)]^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین: $ROR=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$

در نتیجه: $(ROR)\cap R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)\}$

۱۳ - پاسخ: گزینه‌ی ۴ ▲ **مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۶۳ ریاضیات گسسته**

$$M << \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \bigcirc & ۰ & ۰ \\ ۰ & \bigcirc & \bigcirc \\ ۰ & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$$

چون رابطه حداقل دارای دو عضو است، پس ماتریس M حداقل دو درایه‌ی ۱ دارد. ابتدا از بین ۵ محل ممکن، ۲ محل را بـرای ایـن درایـه‌هـا انتخاب می‌کنیم: $\binom{۵}{۲}$

حال ۳ محل خالی باقی‌مانده، $۸ = ۲^۳$ حالت دارد. بنابراین:

تعداد رابطه‌های مورد نظر : $\binom{۵}{۲} \times ۲^۳ = ۱۰ \times ۸ = ۸۰$